



Universidad de Chile  
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería  
Profesor: Raúl Gouet  
Auxiliares: Mario Guajardo, Daniel Yung

## Control 2

### 20 de Octubre de 2005

#### Problema 1 (45 %)

##### Parte A

1. (2.0 pts.) En el problema de la ruina del jugador, para  $p = \frac{1}{2}$ , calcule el número esperado de apuestas hasta que concluye el juego, partiendo desde una fortuna inicial  $i$ .

##### Parte B

El número de trabajos que llegan al final de cada día a un centro de procesamiento sigue una distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$ . El centro sólo tiene espacio para  $N$  trabajos. Los trabajos que llegan tal que se sobrepasa esta capacidad son retirados del centro (no quedan trabajos en espera por ser procesados).

Los trabajos recibidos se empiezan a procesar al comienzo del día siguiente. Independiente de los demás y de cuántos días lleva en el centro, un trabajo es terminado de procesar durante el día con probabilidad  $p$ . De lo contrario, se mantendrá en el centro y seguirá siendo procesado al día siguiente.

Los trabajos que se han terminado de procesar son despachados del centro al final de cada día (antes de aceptar nuevos trabajos).

2. (2.0 pts.) Modele el número de trabajos al inicio del día en el centro de procesamiento como una cadena de Markov. Clasifique sus estados en clases y caracterícelas. Argumente la existencia de una ley de probabilidades estacionarias.
3. (2.0 pts.) El centro de procesamiento *NY Fenix* funciona de acuerdo al sistema anterior. Considere que este centro lleva  $M$  días funcionando,  $M \gg 0$ . *Fenix Rolland*, uno de sus empleados, dice haber estudiado el sistema durante este tiempo y postula que  $\mu_{ii} = \mu \quad \forall i$ , en que  $\mu_{ii}$  denota el tiempo promedio que el sistema demora en regresar al estado  $i$  habiendo salido desde este estado.
  - Basado en el postulado de *Fenix Rolland*, ¿Qué valor esperaría usted para  $\mu$ ?
  - Explique cómo probaría la veracidad o falsedad del postulado de *Fenix Rolland*. En particular, ¿qué relación debiera existir entre  $\lambda$  y  $p$  para que sean consistentes con el postulado de *Fenix Rolland*?

#### Problema 2 (45 %)

##### Parte A

A una tienda que comercializa sólo 2 productos, *Tipo A* y *Tipo B*, llegan clientes según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  [Clientes/día]. De acuerdo a los registros históricos de la tienda se sabe que estos clientes se comportan de la siguiente forma:

- Con probabilidad  $p_A$  un cliente demanda una unidad del producto de *Tipo A*, independientemente de si demanda o no unidades del producto de *Tipo B*.
- Con probabilidad  $p_B$  un cliente demanda una unidad del producto de *Tipo B*, independientemente de si demanda o no unidades del producto de *Tipo A*.

- Si un cliente demanda una unidad de cada producto, compra sólo si hay stock de los dos, es decir, compra una unidad de *Tipo A* y una unidad de *Tipo B* o se retira del local sin comprar.

La tienda tiene como política de reposición de inventario hacer un pedido a su proveedor cada vez que el stock de uno de los 2 tipos de productos cae a  $R_A$  y  $R_B$  unidades para productos *Tipo A* y *B* respectivamente y no haya un pedido en curso. El proveedor abastece a la tienda sólo en el(los) tipo(s) de producto(s) que esté(n) bajo la cantidad umbral de pedido ( $R_A$  y  $R_B$ ), hasta quedar con un stock de  $Q_i$  unidades para el producto *Tipo i*,  $i \in \{A, B\}$ , si el producto *Tipo i* es abastecido en ese pedido ( $R_A < Q_A, R_B < Q_B$ ). Considere que el proveedor demora un tiempo distribuido exponencialmente de media  $\frac{1}{\mu}$  [días] en abastecer cualquier pedido de la tienda medido a partir desde que recibe la orden <sup>1</sup>. Los productos entregados por el proveedor quedan inmediatamente disponibles para su venta al público.

Considere que inicialmente en la tienda hay  $(R_A + 1)$  productos *Tipo A* y  $(R_B + 1)$  productos *Tipo B*.

1. (3,0 pts.) Modele el inventario de la tienda como una cadena de Markov en tiempo continuo. Especifique claramente estados y tasas de transición. ¿Bajo qué condiciones existen probabilidades estacionarias para esta cadena? Plantee el sistema de ecuaciones que permita obtenerlas.

El costo de poner una orden es  $\$C_P$  y el costo de comprar una unidad de producto de *Tipo i* es  $\$C_i$ . Sea  $\pi_{a,b}$  la fracción de tiempo promedio que en la tienda hay un stock de  $a$  unidades de producto de *Tipo A* y  $b$  unidades de producto de *Tipo B* en el largo plazo. Asumiendo conocidos los valores de  $\pi_{a,b} \quad \forall (a, b)$ , responda:

2. (1,0 pto.) ¿Cuánto se espera que pague la tienda a su proveedor por unidad de tiempo en el largo plazo?
3. (0,5 pts.) ¿Cuántos productos de *Tipo A* se espera vender por unidad de tiempo en el largo plazo? ¿Cuántos de *Tipo B*?
4. (0,5 pts. BONUS) ¿Cuál es el stock promedio de cada producto en el largo plazo?

## Parte B

Considere ahora un sistema más simplificado en que todo cliente que llega de acuerdo al proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  [Clientes/día] demanda una unidad de cada producto y compra sólo si existe stock disponible de ambos, de lo contrario se retira indignado.

La tienda no pone órdenes por producto. Simplemente, el proveedor vendrá cada un tiempo exponencialmente distribuido de media  $\frac{1}{\mu}$  [días] y agregará una unidad de cada producto al inventario, independiente del nivel en que éste se encuentre.

Considere que inicialmente en la tienda hay 0 unidades de producto *Tipo A* y 1 unidad de producto *Tipo B*.

5. (1,5 pts.) Encuentre el número esperado de clientes por unidad de tiempo que en el largo plazo se retiran indignados de la tienda.

## Problema 3 (10 %)

Respecto a la lectura MOVIMOD:

- ¿Qué es una cadena de Markov *interactiva*?
- ¿Cómo se define el estado de la cadena en el modelo propuesto?

---

<sup>1</sup>Note entonces que si bien una orden se pone cuando uno de los productos cae al nivel  $R_i, i \in \{A, B\}$ , en el instante que llega el proveedor a la tienda, puede haber reabastecimiento de ambos productos.